Unione Europea
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
PON 2014 - 2020
MIUR
Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione e la Gestione delle Risorse Umane, Finanziarie e Strumentali
Direzione Generale per interventi in materia di Edilizia Scolastica, per la gestione dei Fondi Strutturali per l'Istruzione e per l'Innovazione Digitale
Ufficio IV
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO (FSE FESR)

ISTITUTO STATALE DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
I.P.S.S.S. "M. LENTINI" - Tel.Fax 099.8867272 * Liceo Sc. "A. EINSTEIN" - Tel.Fax 99.8862888
e-mail taiso0600g@istruzione.it - posta cert taiso0600g@pec.istruzione.it
sito web www.lentinieinstein-mottola.gov.it
C.F. 90002460732 – C.M. TAIS00600G – C.U.U. UFXDQ4

**FSE - Inclusione sociale e lotta al disagio**
**ALLA SCOPERTA DELLE ATTITUDINI NASCOSTE PER FAVORIRE L'INCLUSIONE**
**Modulo: MATEMATICA, ICT E REALTÀ**

# L'ELEVAMENTO A POTENZA NELL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI

Consideriamo il seguente problema.
*Una cellula si divide in due cellule figlie ogni due ore; dopo 8 ore, quante cellule figlie si avranno?*
**Soluzione**
Essendoci state ….. divisioni di ogni cellula in due, alla fine avremo $2\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot\ldots=\ldots$ cellule.

Problemi di questo tipo prevedono di calcolare il prodotto di un certo numero di fattori tutti uguali fra loro. Per esempio: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$.
Per evitare una continua ripetizione è stata introdotta una nuova operazione: la **potenza.** Così $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ si scrive $2^7$ (si legge " 2 alla settima" ). Il numero due è la **base** e il numero 7 è l'**esponente** della potenza. La base indica quale fattore viene moltiplicato per se stesso, l'esponente indica il numero di fattori uguali.
Si pone poi:

- ogni numero naturale, diverso da 0, **elevato a 0 è uguale a 1**;
- ogni numero naturale **elevato a 1 è uguale al numero stesso.**

Non viene invece definita la potenza con base ed esponente 0; $0^0$ **non ha significato.**

**Esempio**

1. Potenze con esponente 0: $2^0=1$; $29873^0=1$; $1^0=1$.

2. Potenze con esponente 1: $2^1=2$; $29873^1=29873$; $1^1=1$; $0^1=0$.

**Completare la seguente tabella:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prodotto | $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ | | | | | | | | |
| Potenza | | $2^4$ | | | | $7^2$ | | | $12^0$ |
| Base | | | 4 | | | | 5 | | |
| Esponente | | | 3 | 9 | | | | 4 | |
| Risultato | | | | 1 | 0 | | 1 | 81 | |

**Scrivi la potenza che fornisce la soluzione del seguente problema e calcolane il valore.**
*Una scuola ha 4 piani. Su ogni piano ci sono 4 classi; ogni classe ha 4 file di banchi e ogni fila è formata da 4 alunni. Quanti sono gli alunni della scuola?*

…………………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………………

**PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI CON LE POTENZE**

**Prodotto di potenze di uguale base.**

Consideriamo la seguente moltiplicazione:

$5^3 \cdot 5^4$ .

Applicando la definizione di potenza possiamo scrivere:

$$5^3 \cdot 5^4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3\,volte} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\,volte} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7\,volte} = 5^7$$

ossia:

$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4}$.

In generale: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (**prima proprietà delle potenze**)

**Quoziente di potenze di uguale base.**

Consideriamo la divisione $5^7 : 5^4$.

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per $5^4$, dia come prodotto $5^7$.

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7\,volte} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\,volte}$$

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7\,volte} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{(7-4)\,volte} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\,volte}$$

Il numero cercato è $5^3$; quindi possiamo scrivere:

$5^7 : 5^4 = 5^3$.

In generale: $a^m : a^n = a^{m-n}$ con $n \geq m$ ( **seconda proprietà delle potenze** )

<u>Osservazione</u>

Se l'esponente del dividendo è minore dell'esponente del divisore la proprietà è impossibile nell'insieme dei numeri naturali:

$$9^4 - 9^{10} = 9^{4-10 \;\to\; impossibile\ in\ N}\ .$$

<u>Conseguenza della proprietà</u>

Una conseguenza immediata di questa proprietà è che:

$$a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$$

**Dopo aver osservato il seguente esempio prova a dimostrarla.**

Esempio

$3^0 = 3^{5-5} = 3^5 : 3^5 = 1$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

**Potenza di una potenza**

Consideriamo la potenza $5^2$ come base di un'altra potenza con esponente 3:

$(5^2)^3$.

Per definizione di potenza:

$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 =$

Per la prima proprietà delle potenze:

$= 5^{2+2+2} = 5^{2\cdot 3}$.

Quindi:

$(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3}$.

In generale $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ ( **terza proprietà delle potenze** )

**Prodotto di potenze di uguale esponente.**

Dato un prodotto fra potenze con lo stesso esponente $3^2 \cdot 5^2$, cerchiamo di scriverlo in altro modo, utilizzando proprietà note.

Per definizione di potenza scriviamo:

$3^2 \cdot 5^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$

Poi applichiamo le proprietà commutativa e associativa:

$= (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) =$

Per definizione di potenza:

$= (3 \cdot 5)^2$.

Possiamo concludere che:

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2$.

In generale $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ( **quarta proprietà delle potenze** )

**Quoziente di potenze di uguale esponente.**

Consideriamo il quoziente fra potenze con lo stesso esponente:

$6^2 : 3^2$.

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per $3^2$, dia come prodotto $6^2$. Mostriamo che quel numero è dato da $(6:3)^2$.

$(6:3)^2 \cdot 3^2 =$

Per la quarta proprietà delle potenze:

$= [(6:3) \cdot 3]^2 =$

Poiché la divisione e l'operazione inversa della moltiplicazione:

$= 6^2$.

Possiamo concludere che:

$6^2 : 3^2 = (6:3)^2$.

In generale $a^n : b^n = (a:b)^n$ ( **quinta proprietà delle potenze** ).

**ATTENTI ALL'ERRORE !**

$3^2 + 3^4 \neq 3^{2+4}$

Infatti $3^2 + 3^4 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 + 81 = 90$,

mentre $3^{2+3} = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

**Analogamente prova a verificare che**:

- $2^5 - 2^2 \neq 2^{5-2}$ ;
- $7^2 + 3^2 \neq (7+3)^2$ ;
- $5^3 - 3^3 \neq (5-3)^3$ .

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

**Completa la seguente tabella, sottolineando gli eventuali errori delle uguaglianze riportate nella prima colonna e riscrivendo nella seconda le uguaglianze vere.**

| | |
|---|---|
| $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$ | |
| $2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^4$ | |
| $7^{12} : 7^4 = 7^3$ | |
| $(2^0)^3 = 2^3$ | |
| $(3^5)^2 = 3^{5^2} = 3^{25}$ | |
| $7^3 : 7^0 = impossibile$ | |
| $5^0 = 0$ | |
| $5^0 = 5$ | |

**LABORATORIO DI INFORMATICA.**

**Applicando le proprietà delle potenze, calcola il valore delle seguenti espressioni** $2^5 : 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2^0$

- $(4^2 \cdot 2^2) : 2^2 - 5^2 : 5^1 + (2^2 \cdot 3^2)^3 : 6^5$
- $\left[(4^8 : 4^2)^2 \cdot (4^7 : 4^2)\right] : 4^{11} + 1^4 - (2^2 \cdot 3 + 1)$

**Trasforma le seguenti espressioni in potenze rispetto alla base indicata e risolvere:**

a) base 2. $(8^5 : 2^3 \cdot 32^4) : 16^3$

b) base 3. $(27^3 \cdot 9) : 81 \cdot 3$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

**Tradurre in un espressione aritmetica le seguenti frasi, il valore di ciascuna di esse.**

a) Al quadrato della somma di 2 e 3 sottrarre la somma dei quadrati di 3 e 4.
b) Moltiplicare il quadrato della somma di 2 e 3 per il cubo della differenza tra 14 e 9.
c) Dividere il quadrato di 36 per il cubo del prodotto tra 2 e 3.

.....................................................................................................................................
.....................................................................................................................................
.....................................................................................................................................
.....................................................................................................................................
.....................................................................................................................................